



KONSTRUKSI BUKTI MATEMATIS MAHASISWA BERGAYA KOGNITIF REFLEKTIF

Minatun Nadlifah

Pendidikan Matematika, Universitas Muhammadiyah Malang, Indonesia
minatun@umm.ac.id

INFO ARTIKEL

Riwayat Artikel:

Diterima: 31-07-2020
Disetujui: 10-09-2020

Kata Kunci:

Konstruksi bukti;
Gaya kognitif reflektif.

ABSTRAK

Abstrak: Penelitian ini bertujuan untuk mendeskripsikan kualitas konstruksi bukti matematis yang dihasilkan oleh mahasiswa bergaya kognitif reflektif. Penelitian dilakukan dengan menggunakan pendekatan kualitatif dengan jenis penelitian deskriptif-eksploratif. Penelitian melibatkan tiga mahasiswa tahun pertama bergaya kognitif reflektif yang menempuh mata kuliah teori bilangan. Data diperoleh melalui tiga tahapan. Pertama, identifikasi gaya kognitif mahasiswa dengan menggunakan instrumen *Matching Familiar Figures Test* (MFFT). Kedua, tes tertulis terkait masalah pembuktian. Ketiga, eksplorasi pemahaman mahasiswa tentang konstruksi bukti yang dihasilkan melalui teknik wawancara. Hasil penelitian menunjukkan bahwa terdapat tiga kategori kualitas konstruksi bukti yang dihasilkan oleh mahasiswa bergaya kognitif reflektif, yakni bukti kurang valid dan tidak valid. Hal ini berarti konstruksi bukti yang dihasilkan memuat kesalahan pada aspek struktur bukti dan pemahaman konseptual bukti.

Abstract: *The purpose of the study is to describe the quality of mathematical proof construction produced by the reflective cognitive style of undergraduate students'. The research was conducted by a qualitative approach and used a descriptive-explorative research type. The study involved three first-year undergraduate students who have a reflective cognitive style. The data were obtained through three stages. First, identify the students' cognitive style using Matching Familiar Figures Test (MFFT) instrument. Second, a proof written test. Third, exploration of the undergraduate students' understanding of proof construction through interview technique. The results showed that there were three categories of quality of proof construction produced by the reflective cognitive style of undergraduate students, namely less valid proof and invalid proof. It means that the construction of the proof construction contains many errors in the aspects of the proof-structure and proof-conceptual understanding.*

A. LATAR BELAKANG

Kemampuan mengkonstruksi bukti matematis secara formal merupakan domain penting dalam pembelajaran matematika di universitas (Alcock & Weber, 2010; Stylianou et al., 2015). Pengenalan proses konstruksi bukti secara formal kepada mahasiswa bertujuan untuk membuat makna (*sense*) suatu definisi formal sebagai cara yang dapat digunakan dalam membangun teorema secara deduksi (Syamsuri, 2016). Konstruksi bukti secara formal dilakukan dengan melibatkan penggunaan definisi formal atau teorema yang telah ditetapkan sebelumnya (Alcock et al., 2015; Selden, 2012). Mengkonstruksi bukti matematis secara formal berarti melakukan sebuah proses yang diawali dari definisi eksplisit kemudian menyimpulkan sifat-sifat lainnya sebagai suatu konsekuensi (Tall, 2011).

Selden (2012) mengemukakan bahwa terdapat tiga tindakan yang berguna dalam mengkonstruksi bukti. *Pertama*, mengeksplorasi. Tindakan ini berupa memahami hal yang harus dibuktikan dan hal yang tersedia untuk digunakan dalam pembuktian tanpa

memiliki gagasan tentang cara untuk melanjutkan. *Kedua*, pengerjaan ulang argumen dalam kasus yang dicurigai sebagai kesalahan atau menyampaikan argumen yang tidak sesuai arah dan tidak membantu. Hal yang perlu dilakukan adalah tanggapan ulang bagian dari argumen tersebut. *Ketiga*, memvalidasi sebuah penyelesaian bukti. Setelah menyelesaikan bukti, mahasiswa harus membaca dan memeriksanya dengan cermat kebenaran pada setiap baris dari atas ke bawah dan setiap baris berikutnya dari hal yang telah dijelaskan sebelumnya.

Studi pendahuluan yang dilakukan terhadap empat puluh lima mahasiswa yang dipilih secara acak untuk menyelesaikan masalah pembuktian yang berkaitan dengan materi keterbagian, yakni "Buktikan dengan menggunakan induksi matematika bahwa $n^3 - n$ habis dibagi 3, $\forall n \in \mathbb{N}$ " menunjukkan tidak ditemukannya penggunaan prosedur induksi matematika dalam konstruksi pembuktian yang dihasilkan. Sebanyak 76% mahasiswa memilih menyelesaikan masalah pembuktian melalui penggunaan contoh khusus sedangkan 24%

mahasiswa menggunakan prosedur pembuktian lain yang tidak mendukung penyelesaian masalah.

Melalui wawancara diketahui bahwa sebagian besar mahasiswa menyatakan lupa prosedur pembuktian dengan menggunakan induksi matematika. Selain itu, diketahui juga terdapat mahasiswa yang mengetahui prosedur pembuktian dengan menggunakan induksi matematika namun tidak dapat mengaplikasikannya dalam penyelesaian masalah. Oleh karenanya, mahasiswa cenderung memilih sebarang dua atau tiga bilangan bulat positif yang lebih mudah digunakan untuk menunjukkan pernyataan $n^3 - n$ habis dibagi 3, $\forall n \in \mathbb{N}$ bernilai benar.

Beberapa peneliti telah memfokuskan penelitian pada konstruksi bukti matematis. Hasil penelitian Nadlifah & Prabawanto (2017) menunjukkan bahwa konstruksi bukti yang dihasilkan oleh mahasiswa tahun pertama berada pada dua kategori bukti, yakni visual dan simbolik. Syamsuri dkk (2016) mendeskripsikan karakteristik konstruksi bukti formal berdasarkan struktur bukti yang dihasilkan dan pemahaman konseptual mahasiswa dalam bentuk Model Kuadran. Abdussakir (2014) menggambarkan proses berpikir yang digunakan oleh mahasiswa dalam mengkonstruksi bukti dengan menggunakan strategi semantik.

Upaya peningkatan kemampuan mahasiswa dalam pembuktian matematis juga dilakukan oleh beberapa peneliti melalui beberapa penerapan strategi dan pendekatan berikut: strategi abduktif-deduktif (Salsabila, Ratnaningsih, & Hadi, 2015); pendekatan induktif-deduktif berbasis definisi termodifikasi (Samparadja, 2014) dan pendekatan progresif (Kodirun, 2014). Dengan demikian, fokus kajian yang dilakukan peneliti sebagian besar menekankan pada prosedur dan proses berpikir dalam mengkonstruksi bukti tanpa melibatkan karakteristik yang dimiliki oleh mahasiswa.

Secara psikologis, mahasiswa memiliki cara yang berbeda dalam menerima, mengolah, mengorganisasi, dan merespon suatu informasi (Michalska & Zajac-Lamparska, 2015). Perbedaan karakter tersebut berkaitan dengan gaya kognitif. Gaya kognitif reflektif merupakan salah satu dimensi gaya kognitif yang menunjukkan kecenderungan seseorang dalam merespon masalah secara lambat namun respon yang diberikan cenderung tepat. Dalam proses pemecahan masalah matematika, subjek yang bergaya kognitif reflektif terlihat sangat berhati-hati dalam setiap tahapannya serta mempertimbangkan semua alternatif penyelesaian masalah (Rosyada & Rosyidi, 2018).

Berdasarkan paparan hasil penelitian, pendapat para ahli serta fakta-fakta tentang pembuktian matematis dan gaya kognitif reflektif, maka kualitas konstruksi bukti matematis mahasiswa perlu untuk dikaji secara mendalam, khususnya pada mahasiswa tahun pertama yang bergaya kognitif reflektif.

B. METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif dengan jenis penelitian deskriptif-eksploratif. Penelitian melibatkan empat mahasiswa tahun pertama di Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Muhammadiyah Malang yang bergaya kognitif reflektif.

Data diperoleh melalui tiga tahapan. Tahap pertama, identifikasi gaya kognitif mahasiswa tahun pertama dengan menggunakan instrumen tes *Matching Familiar Figure Test* (MFFT). Mahasiswa tahun pertama yang memenuhi kriteria bergaya kognitif reflektif selanjutnya disebut sebagai mahasiswa reflektif. Tahap kedua, tes tertulis tentang masalah pembuktian matematis yang berkaitan dengan materi keterbagian bilangan bulat. Tes diberikan kepada tiga mahasiswa reflektif yang telah dipilih secara acak. Tahap ketiga, eksplorasi pemahaman mahasiswa terhadap konstruksi bukti yang dihasilkan melalui teknik wawancara.

Kualitas konstruksi bukti yang dihasilkan oleh mahasiswa reflektif selanjutnya dianalisis dengan menggunakan dua aspek penilaian pembuktian, yakni struktur dan pemahaman konseptual. Aspek struktur bukti meliputi susunan bukti, asumsi, urutan bukti, jenis bukti dan penggunaan notasi. Aspek pemahaman konseptual meliputi kecukupan rincian, kejelasan pernyataan, kebenaran implikasi dan pernyataan, serta penyajian kasus.

Adapun kriteria kualitas konstruksi bukti yang dihasilkan oleh mahasiswa reflektif diklasifikasikan ke dalam empat kategori, yakni (1) *valid*, jika bukti memuat semua kriteria pada aspek penilaian pembuktian, (2) *kurang valid*, jika bukti secara substansial memuat langkah/gagasan sudah benar atau memenuhi kategori pada aspek penilaian namun terdapat kekurangan dalam penyajiannya, (3) *tidak valid*, jika bukti memuat banyak kesalahan pada aspek penilaian atau berupa penulisan kembali masalah menggunakan bahasa mahasiswa sendiri namun tidak ada dasar dalam upaya mengkonstruksi bukti, dan (4) *sangat tidak valid*, jika tidak memberikan bukti.

C. HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Hasil

Penelitian ini berupaya untuk mendeskripsikan kualitas konstruksi bukti matematis yang dihasilkan oleh mahasiswa reflektif. Tabel 1 menunjukkan kualitas konstruksi bukti yang dihasilkan oleh mahasiswa reflektif dalam menyelesaikan masalah pembuktian berikut: "Buktikan bahwa jumlah lima bilangan bulat berurutan selalu habis dibagi lima!"

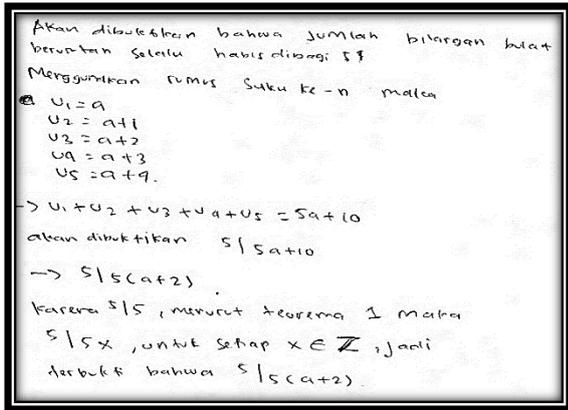
Tabel 1. Kualitas Konstruksi Bukti Mahasiswa

Responden	Konstruksi Bukti
M1	Kurang Valid
M2	Tidak Valid
M3	Tidak Valid

Tabel 1 menunjukkan bahwa kualitas konstruksi bukti yang dihasilkan oleh mahasiswa reflektif termasuk dalam kategori kurang valid dan tidak valid. Konstruksi bukti yang dihasilkan oleh M1 dan M4 termasuk dalam kategori kurang valid sedangkan konstruksi bukti yang dihasilkan oleh M2 dan M3 termasuk dalam kategori tidak valid.

Gambar 1 merupakan konstruksi bukti yang dihasilkan oleh M1. Secara umum, M1 memiliki pemahaman yang baik tentang fakta yang diketahui dan unsur yang hendak dibuktikan. Hal ini terlihat

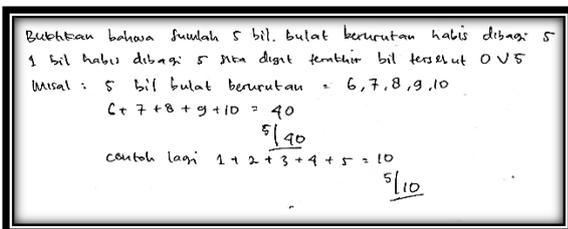
dari kemampuan M1 dalam merepresentasikan fakta tentang lima bilangan bulat berurutan dan bilangan habis dibagi 5.



Gambar 1. Hasil Konstruksi Bukti oleh M1

Ditinjau dari struktur bukti, M1 menggunakan metode pembuktian langsung namun belum disajikan secara sistematis. Selain itu, M1 juga menggunakan notasi "→" secara tidak tepat. Ditinjau dari pemahaman konsep, terdapat langkah penting yang memerlukan justifikasi dan penjelasan namun tidak disertakan dalam pembuktian, yakni "→ 5|5(a + 2)".

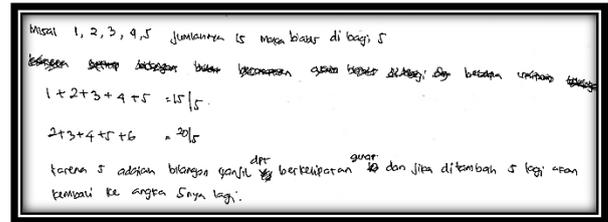
Berbeda dengan M1, secara umum, M2 telah mengetahui fakta dalam pernyataan namun belum mampu merepresentasikan fakta dalam notasi matematika yang tepat. Gambar 2 menunjukkan konstruksi bukti yang dihasilkan oleh M2.



Gambar 2. Hasil Konstruksi Bukti oleh M2

Ditinjau dari struktur bukti, M2 hanya memberikan contoh kasus dalam penyelesaian masalah pembuktian. Pemilihan lima bilangan bulat tertentu yang berurutan sebagai asumsi pembuktian merupakan hal yang tidak dibenarkan. Ditinjau dari pemahaman konsep, hanya ada dua contoh kasus khusus yang belum dapat digeneralisasi.

Tidak berbeda dengan M2, hasil konstruksi bukti M3 juga dilakukan melalui pemilihan contoh kasus sebagaimana tersaji pada Gambar 3. Secara umum, M3 telah mampu mengidentifikasi fakta yang diketahui dalam pernyataan dan juga unsur yang akan dibuktikan namun belum dapat menghubungkannya dengan bahasa dan notasi matematika yang benar.



Gambar 3. Hasil Konstruksi Bukti oleh M3

Ditinjau daei pemahaman konsep, argumen yang ditampilkan pada pembuktian mengandung makna ambigu atau membingungkan. Ditinjau dari struktur pembuktian, Gambar 4.6 menunjukkan bahwa RF3 mengawali pembuktian dengan cara menetapkan bilangan 1, 2, 3, 4, 5 sebagai asumsi kebenaran. Selanjutnya digunakan operasi penjumlahan terhadap asumsi untuk membuktikan pernyataan jumlah lima bilangan bulat berurutan habis dibagi lima. Pada proses pembuktian, muncul lima bilangan bulat berurutan lain yang tidak diasumsikan diawal langkah pembuktian, yakni bilangan 2, 3, 4, 5, 6. Langkah pembuktian juga memuat notasi yang membingungkan, yakni

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15|5.$$

2. Pembahasan

Secara umum, konstruksi bukti yang dihasilkan oleh mahasiswa reflektif tidak termasuk dalam kriteria konstruksi bukti yang valid. Konstruksi bukti yang dihasilkan oleh mahasiswa reflektif banyak dikategorikan sebagai bukti yang tidak valid, artinya konstruksi bukti yang dihasilkan banyak memuat kesalahan terkait aspek struktur bukti dan pemahaman konseptual. Kriteria konstruksi bukti yang tidak valid sejalan dengan kriteria bukti formal pada model kuadran III yang dikemukakan oleh Syamsuri dkk (2016). Adapun karakteristik konstruksi bukti formal pada kuadran III, yakni bukti berisi beberapa konsep yang salah, membuat pernyataan yang tidak tepat atau salah perhitungan, serta mengklaim suatu pernyataan merupakan implikasi dari pernyataan yang lain.

Terdapat satu orang mahasiswa reflektif yang menghasilkan konstruksi bukti dalam kriteria bukti yang kurang valid pada setiap penyelesaian soal pembuktian yang diberikan. Ini berarti bukti yang dihasilkan secara substansial menunjukkan gagasan yang mendukung pembuktian atau memenuhi kategori pada aspek penilaian pembuktian namun terdapat kekurangan dalam penyajiannya. Kriteria konstruksi bukti tersebut sejalan dengan kriteria bukti formal pada model kuadran II (Syamsuri dkk, 2016).

Hasil penelitian menunjukkan hanya M1 yang melakukan pembuktian melalui metode pembuktian langsung. Konstruksi bukti yang dihasilkan juga menunjukkan kemampuan M1 dalam membuat koneksi antara fakta yang diketahui dan unsur yang akan dibuktikan. M1 memanfaatkan aturan suku ke-*n* dari barisan dan deret aritmatika untuk membuktikan pernyataan "jumlah lima bilangan bulat berurutan selalu habis dibagi 5". Konstruksi bukti yang dihasilkan M1 juga mengarah pada kebenaran penarikan kesimpulan melalui koneksi antara fakta

jumlah lima bilangan berurutan dan bilangan yang habis dibagi lima dengan memanfaatkan sifat keterbagian bilangan bulat.

Langkah pembuktian yang dilakukan oleh M1 sejalan dengan pernyataan Healy & Hoyles (1998), yakni untuk dapat mengkonstruksi pembuktian secara valid, mahasiswa harus mampu memilah-milah sifat-sifat tertentu yang telah diketahui dan yang akan disimpulkan serta mampu mengatur transformasi yang penting untuk menyimpulkan kumpulan sifat kedua dari rangkaian pertama sehingga menjadi rangkaian bukti yang koheren dan lengkap.

Hasil penelitian yang berbeda ditunjukkan oleh M2 dan M3. Keduanya hanya memberikan contoh kasus untuk menetapkan kebenaran pernyataan lima bilangan bulat habis dibagi lima. M2 menyadari bahwa pembuktian seharusnya dilakukan dengan cara membuktikan pernyataan secara umum namun keterbatasan pemahaman tentang cara merepresentasikan fakta lima bilangan berurutan secara matematis mendorong M2 dan M3 memilih contoh kasus sebagai upaya membuktikan pernyataan. Padahal, penggunaan contoh spesifik hanya untuk membantu proses konstruksi bukti dan bukan sebagai bukti yang valid (Alcock & Weber, 2010).

D. SIMPULAN DAN SARAN

Konstruksi bukti yang dihasilkan oleh mahasiswa reflektif dikategorikan ke dalam tiga kategori, yakni kurang valid, dan tidak valid. Meskipun demikian, konstruksi bukti yang dihasilkan oleh mahasiswa reflektif banyak dikategorikan sebagai bukti yang tidak valid, artinya konstruksi bukti yang dihasilkan banyak memuat kesalahan terkait aspek struktur bukti dan pemahaman konseptual.

Mahasiswa reflektif mampu mengaitkan fakta dengan konsep matematika, seperti konsep bilangan bulat berurutan dengan konsep barisan dan deret aritmatika. Meskipun demikian, temuan penelitian menunjukkan mahasiswa reflektif kesulitan dalam mentransformasi fakta yang ada ke dalam notasi matematika. Hal ini menjadi faktor penyebab pemilihan contoh kasus sebagai upaya menunjukkan kebenaran suatu pernyataan. Oleh karena itu, perlu adanya pemberian *scaffolding* dan *reinforcement* untuk mengatasi kesulitan mahasiswa dalam menghasilkan konstruksi bukti yang valid.

DAFTAR RUJUKAN

- Abdussakir. (2014). Proses Berpikir Mahasiswa dalam Menyusun Bukti Matematis dengan Strategi Semantik. *Jurnal Pendidikan Sains*, 2(3), 132–140.
- Alcock, L., Hodds, M., Roy, S., & Inglis, M. (2015). Investigating and Improving Undergraduate Proof Comprehension. *Notices of the American Mathematical Society*, 62(07), 1. <https://doi.org/10.1090/noti1263>
- Alcock, L., & Weber, K. (2010). Undergraduates' Example Use in Proof Construction: Purposes and Effectiveness. *Investigations in Mathematics Learning*, 3(1), 1–22. <https://doi.org/10.1080/24727466.2010.11790298>
- Healy, L., & Hoyles, C. (1998). *Justifying and proving in school mathematics. Technical Report on the Nationwide Survey* (Mathematic). Institute of Education, University of London.
- Kodirun. (2014). *Pengaruh Pendekatan Progresif Terhadap Peningkatan Kemampuan Mahasiswa dalam Pembuktian dan Penulisan Jurnal Matematika*. Sekolah Pascasarjana, Universitas Pendidikan Indonesia.
- Michalska, P., & Zajac-Lamparska, L. (2015). The Measurement of Cognitive Style Reflection-Impulsivity in the Adulthood-Results of Own Study. *Journal Polskie Forum Psychologiczne*, 20(4), 573–588.
- Nadlifah, M., & Prabawanto, S. (2017). Mathematical Proof Construction: Students' Ability in Higher Education Mathematical Proof Construction: Students' Ability in Higher Education. *Journal of Physics: Conference Series*, 895(1), 1–5.
- Rosyada, A., & Rosyidi, A. H. (2018). Profil Pemecahan Masalah Matematika Konstekstual Terbuka Siswa ditinjau dari Gaya Kognitif Reflektif dan Impulsif. *Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika*, 7(2), 299–307.
- Salsabila, E., Ratnaningsih, & Hadi, I. (2015). Pembekalan Pemahaman Metode Pembuktian Matematika dan Penerapan Strategi Abduktif-Deduktif untuk Mengembangkan Kemampuan Membuktikan Konsep Aljabar Abstrak pada Mahasiswa Jurusan Matematika FMIPA UNJ. *Jurnal Matematika Integratif*, 11(1), 15–24.
- Samparadja, H. (2014). *Pengaruh Pendekatan Induktif-Deduktif Berbasis Definisi Termodifikasi dalam Pembelajaran Struktur Aljabar terhadap Peningkatan Kemampuan Pembuktian dan Disposisi Berpikir Kreatif Matematis Mahasiswa*. Sekolah Pascasarjana, Universitas Pendidikan Indonesia.
- Selden, A. (2012). Transitions and Proof and Proving at Tertiary Level. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education: 19th ICMI Study* (pp. 391–420). Springer.
- Stylianou, D. A., Blanton, M. L., & Rotou, O. (2015). Undergraduate Students' Understanding of Proof: Relationships Between Proof Conceptions, Beliefs, and Classroom Experiences with Learning Proof. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 1(1), 91–134. <https://doi.org/10.1007/s40753-015-0003-0>
- Syamsuri. (2016). Skema Berpikir Mahasiswa Dalam Mengonstruksi Bukti Formal Matematis Menggunakan Cognitive Mapping. *Jurnal Penelitian Dan Pembelajaran Matematika*, 9(1), 73–82.
- Syamsuri, Purwanto, Subanji, & Irawati, S. (2016a). Facilitating Students From Inadequacy Concept in Constructing Proof to Formal Proof. *3rd International Conference on Research, Implementation and Education of Mathematics and Science, May*, ME-34.
- Syamsuri, S., Purwanto, P., Subanji, S., & Irawati, S. (2016b). Characterization of students formal-proof construction in mathematics learning. *Communications in Science and Technology*, 1(2), 42–50. <https://doi.org/10.21924/cst.1.2.2016.2>
- Tall, D. (2011). *Perceptions, operations and proof in undergraduate mathematics*. 1(1), 19–27.