



Strategi Pembuktian Matematis Mahasiswa Pada Soal Geometri

Sofyan Mahfudy

Tadris Matematika, Universitas Islam Negeri (UIN) Mataram, sofyan_mahfudy@uinmataram.ac.id

INFO ARTIKEL

Riwayat Artikel:

Diterima: 07-09-2017

Disetujui: 25-10-2017

Kata Kunci:

Strategi,
Pembuktian,
Geometri

ABSTRAK

Abstrak: Penelitian kualitatif ini bertujuan untuk mengungkap strategi yang digunakan mahasiswa dalam melakukan pembuktian soal Geometri. Subjek dalam penelitian ini adalah mahasiswa yang telah menempuh mata kuliah Geometri. Pengumpulan data dilakukan dengan menggunakan metode tes dan wawancara. Hasil penelitian menunjukkan bahwa strategi pembuktian pada soal Geometri dengan tipe pembuktian sintaksis (*syntactic proof production*) antara lain adalah dengan mengidentifikasi dan memanipulasi pernyataan atau informasi dalam soal, menterjemahkan informasi dalam soal, memilih teorema atau dalil yang relevan, menggunakan simbol atau notasi matematika yang formal dalam melakukan tahapan pembuktian, menggunakan bantuan sketsa, dan menarik kesimpulan dari setiap pernyataan yang telah didapatkan. Sementara strategi pembuktian pada soal Geometri dengan tipe pembuktian semantik (*semantic proof production*) antara lain adalah dengan menggunakan intuisinya untuk membuat asumsi, dugaan atau perkiraan yang dianggap benar dan melakukan penalaran atas asumsi yang dibuat dan menggunakan sketsa untuk membantu memudahkan pembuktian.

Abstract: This qualitative research aims to reveal the strategies that used by students in doing the proof of Geometry. The subjects in this study are students who have taken courses of Geometry. Data is collected through test and interview. The research shows that the strategy of proof of geometry with syntactic proof production type are identifying and manipulating the statement or information in the question, translating the information in the question, choosing the relevant theorem, using formal mathematical symbol or notation in conducting the proof stage, using a sketch, and making a conclusions from every statement that has been obtained. The strategy of proof of geometry with semantic proof production are using his intuition to make assumptions, guesses or estimates that are considered correct and reasoning and using sketches to help facilitate proof.

A. LATAR BELAKANG

Geometri merupakan cabang matematika yang membahas secara mendalam konsep-konsep aksioma dasar, definisi, dan teorema atau dalil yang berkaitan dengan segment garis dan sudut, kekongruenan segitiga, ketegaklurusan dan kesejajaran dalam bidang, kesebangunan segitiga, lingkaran, dan tempat kedudukan pada bidang dan ruang. Setiap teorema, dalil, dan pernyataan matematis dalam Geometri memerlukan suatu bukti yang diperoleh melalui proses pembuktian. Pembuktian ini merupakan langkah untuk menunjukkan suatu pernyataan Geometri valid atau tidak (benar atau salah) sehingga kebenarannya dapat diterima secara umum (*general*). Oleh karenanya, kemampuan dalam menyusun bukti

matematis sangat diperlukan mahasiswa pada mata kuliah ini.

Pembuktian matematis memegang peranan yang sangat penting dalam bidang matematika maupun dalam bidang pendidikan matematika. Bukti merupakan inti dari berpikir matematis dan bernalar deduktif (Healy & Hoyles dalam Cheng & Lin, 2009). Seseorang tidak dapat mempelajari matematika tanpa belajar bukti matematis dan bagaimana membuatnya (Balacheff, 2010). Bahkan, bukti dianggap sebagai hal yang sangat penting (fundamental) dalam melakukan dan mengetahui matematika. Bukti adalah sebagai dasar dalam pemahaman matematika dan hal yang sangat penting bagi pengembangan, pembentukan, dan komunikasi pengetahuan matematika (Stylianides, 2007).

Penyusunan bukti matematis tidak hanya bermanfaat untuk menunjukkan kebenaran suatu pernyataan atau ekspresi matematika (Kogce, Aydin, & Yildiz, 2010). Lebih lanjut penyusunan suatu bukti matematis memiliki beberapa tujuan bagi mahasiswa antara lain penjelasan (*explanation*), sistemisasi (*systemization*), komunikasi (*communication*), penemuan hasil yang baru (*discovery of new results*), justifikasi/pembenaran sebuah definisi (*justification of a definition*), mengembangkan intuisi (*developing intuition*), dan menyediakan kemandirian (*providing autonomy*) (Weber, 2003).

Seorang mahasiswa matematika atau pendidikan matematika (tadris matematika) dituntut untuk memiliki kemampuan membuktikan suatu pernyataan matematis dengan baik. Para ahli telah bersepakat pentingnya mahasiswa mengembangkan kemampuan yang dibutuhkan dalam menyusun suatu bukti (Blanton, Stylianou, & David, 2003). Kemampuan ini menjadi penting karena tidak hanya berfungsi untuk melatih kemampuan berpikir mahasiswa, namun untuk mengetahui alur berpikir matematika dan lebih jauh lagi untuk ikut mengembangkan matematika sebagai sebuah disiplin ilmu. Apalagi, seorang mahasiswa tadris matematika nantinya akan menjadi seorang guru yang mengajar pada disiplin ilmu matematika dengan memberikan pondasi berpikir logis dan rasional kepada murid-muridnya, sehingga kemampuan dalam pembuktian matematis adalah sebuah keniscayaan bagi mereka.

Kenyataannya menunjukkan bahwa kemampuan mahasiswa dalam membuktikan sebuah pernyataan matematis belum sepenuhnya baik. Beberapa penelitian menunjukkan bahwa mahasiswa mengalami kesulitan dalam menyusun bukti matematis (Epp, 2003). Penelitian yang lain juga menunjukkan bahwa bukti matematis merupakan salah satu konsep matematika yang sulit bagi mahasiswa baik untuk mempelajari maupun menyusunnya (Pfeiffer, 2011).

Hal tersebut di atas juga didukung dengan pengalaman peneliti pada saat mengampu mata kuliah Geometri pada program studi tadris matematika di fakultas tarbiyah dan keguruan UIN Mataram. Mahasiswa seringkali tidak tuntas dalam menyusun bukti matematis pada persoalan Geometri yang dapat dilihat dari hasil tes baik kuis, ujian tengah semester, maupun ujian akhir semester. Observasi awal menunjukkan bahwa kebanyakan mahasiswa salah dalam menerapkan suatu definisi

atau aksioma serta tidak runtut dalam menyusun pembuktian. Mahasiswa juga lemah dalam memberikan alasan logis (*reasoning*) pada setiap tahapan pembuktian suatu dalil, teorema, atau pernyataan yang lain.

Dengan melihat permasalahan di atas, maka peneliti tertarik untuk melihat sejauh mana strategi yang dilakukan mahasiswa dalam melakukan pembuktian matematis pada persoalan geometri. Penelitian ini akan menganalisis secara kualitatif strategi pembuktian matematis mahasiswa pada soal Geometri mahasiswa tadris matematika pada saat melakukan proses pembuktian tersebut.

B. METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan deskriptif kualitatif yang berupaya untuk mendeskripsikan strategi pembuktian matematis yang dilakukan mahasiswa pada soal Geometri. Dikatakan penelitian deskriptif karena peneliti melakukan analisis hanya sampai pada taraf deskripsi, yaitu menganalisis dan menyajikan fakta secara sistematis (Azwar, 2007). Tempat penelitian adalah di lingkup program studi tadris matematika UIN Mataram dengan waktu penelitian dari bulan Juli sampai dengan Agustus 2017. Sementara subjek dalam penelitian ini adalah 1 (satu) orang mahasiswa semester IV program studi tadris matematika UIN Mataram yang telah menempuh mata kuliah Geometri.

Instrumen dalam penelitian ini adalah peneliti sendiri sebagai instrumen utama, soal tes geometri, dan pedoman wawancara (*interview*). Instrumen soal tes terdiri dari 4 (empat) butir soal geometri yang diadopsi dari buku geometri karya Alexander & Koeberlein (2015) yang kemudian dikembangkan oleh peneliti dan divalidasi oleh ahli yang menekuni bidang matematika murni. Instrumen tes berfungsi untuk mengetahui strategi pembuktian yang dilakukan mahasiswa pada soal geometri. Pokok bahasan yang dipilih adalah kesebangunan, kekongruenan, dan kesejajaran. Alasan pemilihan pokok bahasan tersebut karena banyak diaplikasikan pada level sekolah, sehingga sebagai calon guru harus menguasai dengan baik konsep pokok bahasan tersebut. Instrumen lainnya adalah berupa pedoman wawancara yang berfungsi sebagai panduan untuk melakukan wawancara terhadap subjek penelitian. Wawancara bertujuan untuk menggali informasi lebih lebih dalam tentang strategi pembuktian yang dilakukan mahasiswa pada soal Geometri.

Analisis data yang digunakan dalam penelitian ini adalah analisis deskriptif kualitatif dengan menggunakan model Milles dan Hubberman yang terdiri dari reduksi data, penyajian data, verifikasi dan pengambilan keputusan (Moleong, 2012). Peneliti memberikan soal geometri kepada subjek penelitian kemudian mengkategorikan jenis pembuktian berdasarkan kerangka kerja (*framework*) yang dikembangkan oleh Weber (2004). Kerangka kerja tersebut menjelaskan proses mahasiswa dalam mengkonstruksi bukti matematis berdasar hasil penelitian Weber (2004) terhadap 9 mahasiswa pada mata kuliah Aljabar Abstrak dan 6 mahasiswa di mata kuliah Analisis Riil.

Peneliti mengadopsi kerangka kerja Weber (2004) tersebut karena kerangka kerja ini ditawarkan untuk menjelaskan bagaimana proses pembuktian pada mahasiswa. Oleh karenanya peneliti berasumsi bahwa kerangka kerja tersebut cocok jika diterapkan untuk melihat bagaimana proses pembuktian mahasiswa pada soal Geometri. Berdasarkan kerangka kerja Weber (2004), proses mahasiswa dalam menyusun bukti matematis terbagi menjadi tiga yaitu a) pembuktian secara prosedural (*procedural proof production*), b) pembuktian secara sintaksis (*syntactic proof production*), dan c) pembuktian secara semantic (*semantic proof production*). Deskripsi singkat masing-masing sebagai berikut:

TABEL 1

DESKRIPSI PROSES PUNYUSUNAN BUKTI MATEMATIS

Tipe penyusunan bukti	Deskripsi
Pembuktian secara prosedural (<i>procedural proof production</i>)	Mahasiswa mencoba untuk mengkonstruksi bukti dengan menerapkan suatu prosedur atau menetapkan beberapa langkah-langkah tertentu yang dia yakini akan dapat menghasilkan bukti yang benar (valid). Mungkin saja prosedur yang diberikan sangat berarti bagi mahasiswa, dengan kata lain mahasiswa memahami mengapa keberhasilan penerapan prosedur/cara tersebut akan dapat menghasilkan argumen yang secara logis dapat membentuk kebenaran yang diminta untuk dibuktikan.
Pembuktian secara sintaksis (<i>syntactic proof production</i>)	Mahasiswa mencoba untuk menuliskan suatu bukti dengan memanipulasi definisi dan fakta lain yang relevan dan benar dengan cara yang logis. Dalam literatur pendidikan matematika, tipe

pembuktian ini juga disebut dengan deduktif formal murni.

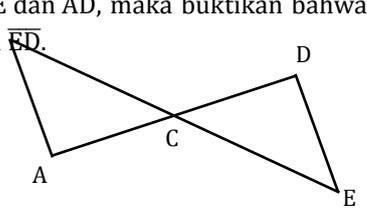
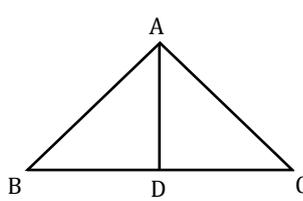
Pembuktian secara semantic (<i>semantic proof production</i>)	Mencoba untuk memahami mengapa pernyataan tersebut benar dengan memeriksa representasinya (misalnya diagram) dari objek matematika yang relevan dan kemudian menggunakan argument intuitif sebagai dasar untuk membangun bukti formal. Dalam literatur pendidikan matematika, pembuktian semantic juga disebut dengan dengan pembuktian yang mengikuti berpikir intuitif.
---	---

Data hasil tes dan hasil wawancara akan dilakukan verifikasi yang berupa perbandingan sebagai upaya mengetahui validitas atau keabsahan data yang selanjutnya akan dideskripsikan secara kualitatif. Langkah terakhir adalah membuat kesimpulan dari deskripsi berdasarkan jawaban soal tes dan hasil wawancara kedua subjek penelitian tersebut.

C. HASIL DAN PEMBAHASAN

Tabel 2 berikut menyatakan soal geometri yang digunakan untuk mengidentifikasi strategi pembuktian matematis mahasiswa.

TABEL 2
SOAL GEOMETRI

No.	Deskripsi Soal
1.	Pada gambar berikut, jika diketahui titik C adalah titik tengah \overline{BE} dan \overline{AD} , maka buktikan bahwa \overline{AB} sejajar dengan \overline{ED} . 
2.	Pada gambar di bawah ini, jika $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ dan \overline{AD} adalah garis bagi $\angle BAC$, maka buktikan bahwa \overline{AD} juga merupakan garis tinggi dan sekaligus garis berat segitiga ABC. 
3.	Diketahui segi empat ABCD sembarang. Jika titik P, Q, R, dan S berturut-turut adalah titik tengah sisi \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , dan \overline{DA} , maka buktikan bahwa bangun PQRS adalah berupa jajar genjang.

- Garis tengah sebuah setengah lingkaran berimpit dengan alas \overline{AB} dari segitiga ABC. Titik sudut C bergerak sedemikian hingga sehingga titik tengah sisi \overline{AC} selalu terletak pada setengah lingkaran yang diketahui. Buktikan bahwa himpunan tempat kedudukan titik C adalah setengah lingkaran.

1. Hasil Pembuktian pada Soal Tes

Berikut adalah hasil pembuktian yang dilakukan subjek pada masing-masing soal Geometri beserta analisisnya:

a. Pembuktian pada soal nomor 1

① Given : C titik tengah \overline{BE} dan \overline{AD}
 Prove : $\overline{AB} \perp \overline{ED}$
 Pembuktian
 ① C titik tengah \overline{BE} dan \overline{AD}
 ② $\overline{BC} \cong \overline{EC}$
 $\overline{BE} \cong \overline{AC}$
 ③ $\angle BCA \cong \angle DCE$
 ④ $\triangle CAB \cong \triangle COE$
 ⑤ $\angle BAC \cong \angle CED$
 $\angle BAC \cong \angle CED$
 ⑥ $\angle ABC$ bersebrangan dengan $\angle CED$ dan $\angle BAC$ bersebrangan dengan sudut $\angle CED$ maka menyebabkan $\overline{AB} \parallel \overline{ED}$
 ⑦ diketahui
 ⑧ Segmen bisector
 ⑨ dua sudut yang bertolak belakang
 ⑩ sisi sudut siku (SAC)
 ⑪ jika dua sisi suatu segitiga kongruen maka sudut dihadapan kedua sisi itu kongruen
 ⑫ jika dua garis sejajar dipotong oleh transversal demikian sehingga sudut dalam bersebrangan kongruen maka kedua garis itu seajar.

Gambar 1. Hasil Pembuktian Subjek pada Soal No. 1

Berdasarkan Gambar 1 subjek memulai pembuktian dengan apa yang diketahui soal, yaitu titik C merupakan titik tengah ruas \overline{BE} dan \overline{AD} . Akibat dari pernyataan tersebut juga dapat dituliskan dengan benar oleh subjek, yaitu $\overline{BC} \cong \overline{CE}$ kongruen dengan \overline{CE} dan $\overline{AC} \cong \overline{CD}$. Subjek juga berhasil mengidentifikasi informasi lain dalam soal yaitu $\angle BCA$ kongruen dengan $\angle DCE$ sebagai akibat dari posisi kedua sudut yang saling tolak belakang.

Selanjutnya terlihat pada hasil tes bahwa subjek berhasil menggunakan teorema Sisi, Sudut, Sisi (Side, Angle, Side) untuk menunjukkan bahwa segitiga CAB dan CDE kongruen. Ini menunjukkan bahwa subjek melakukan pengaitan apa yang diketahui dalam soal dengan teorema yang sesuai.

Dalam penyelesaian soal nomor 1 terlihat subjek menggunakan pendekatan deduktif, yang artinya sebuah pernyataan benar dibangun oleh pernyataan-pernyataan lain (premis) yang benar. Penyelesaian juga dilakukan secara runtut dan logis dimana setiap pernyataan disertai dengan argumentasi atau alasan logisnya. Dalam memberikan alasan logis, subjek juga menggunakan teorema atau dalil mana yang sesuai. Terlihat subjek memahami sebuah dalil atau teorema

tertentu dan memilih teorema yang relevan dengan tahapan pembuktian yang dilakukannya.

b. Pembuktian pada soal nomor 2

Given : $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ dan \overline{AD} adalah garis bagi $\angle BAC$
 Prove : \overline{AD} adalah garis tinggi dan garis berat $\triangle ABC$
 Pembuktian
 ① $\overline{AB} \cong \overline{AC}$
 AD garis bagi $\angle BAC$
 ② $\angle BAD \cong \angle DAC$
 ③ $\overline{AD} \cong \overline{AD}$
 ④ $\triangle ABD \cong \triangle ADC$
 ⑤ $\overline{BD} \cong \overline{CD}$
 ⑥ AD garis tengah dari CD sehingga menjadi garis berat
 ⑦ $\overline{AD} \perp \overline{BC}$
 ⑧ Given
 ⑨ Angle bisector
 ⑩ refleksi Property
 ⑪ SAS (sisi sudut sisi)
 ⑫ akibat no. 4
 ⑬ akibat no. 5
 ⑭ jika dua garis berpotongan dan sudut bersisian kongruen maka garis tersebut berpotongan tegak lurus

⑧ AD garis tinggi dari $\triangle ABC$
 ⑨ karena ketinggian adalah sebuah ruas garis dari puncak tegak lurus ke perpanjangan sisi berlawanan.
 > karena jarak titik A ke titik D paling dekat jika dibandingkan jarak titik A ke titik B dan C. Sehingga \overline{AD} adalah garis tinggi dari $\triangle ABC$

Gambar 2. Hasil Pembuktian Subjek pada Soal No. 2

Dalam menyelesaikan soal no. 2 subjek mampu mengidentifikasi informasi dalam soal. Informasi tersebut dapat diterjemahkan dengan yang antara lain notasi $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ dan pengertian \overline{AD} adalah garis bagi $\angle BAC$. Dengan bekal informasi tersebut, mahasiswa mampu menyusun prosedur penyelesaian dengan menggunakan apa yang diketahui dalam soal.

Meskipun secara garis besar subjek berhasil membuktikan soal ini, tetapi terdapat beberapa kesalahan. Kesalahan tersebut adalah pernyataan bahwa ruas \overline{AD} adalah garis tinggi dari segitiga ABC dengan alasan bahwa jarak titik A ke titik D adalah paling dekat jika dibandingkan jarak titik A ke titik B dan C. Subjek mendasarkan ini pada informasi pada gambar semata.

c. Pembuktian pada soal nomor 3

Misalkan segiempat sembarang yang dimaksud pada soal adalah Persegi panjang ABCD ($\square ABCD$)
 Given : P titik tengah \overline{AB}
 Q titik tengah \overline{BC}
 R titik tengah \overline{CD}
 S titik tengah \overline{DA}
 Prove : $\square PQRS$ adalah Jajar genjang.

Pembuktian

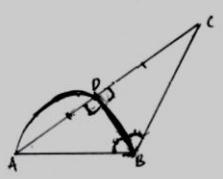
<p>① P titik tengah AB Q titik tengah BC R titik tengah CD S titik tengah DA</p> <p>② $\overline{AP} \cong \overline{BP}$ $\overline{BQ} \cong \overline{CQ}$ $\overline{CR} \cong \overline{DR}$ $\overline{AS} \cong \overline{DS}$</p> <p>③ $\angle PAC \cong \angle PBD \cong \angle QCF \cong \angle RDS$</p> <p>④ anda $\triangle APS \cong \triangle BQR$ dan $\triangle AQR \cong \triangle DRS$</p> <p>⑤ $\overline{PS} \cong \overline{QR}$ dan $\overline{PQ} \cong \overline{SR}$</p> <p>⑥ $\square PQRS$ adalah jajar genjang</p>	<p>① Diketahui</p> <p>② akibat dari no. 1 dan merupakan ang segmen bisector</p> <p>③ karena sama-sama bernilai 90°</p> <p>④ sisi sudut sisi' (SAS)</p> <p>⑤ akibat dari no. 4 dan Definisi Poligon Kongruensi</p> <p>⑥ jika sisi-sisi bertepatan dari suatu segi empat adalah kongruen maka segi empat itu adalah jajar genjang</p>
---	--

Gambar 3. Hasil Pembuktian Subjek pada Soal No. 3

Dalam menjawab soal nomor 3, subjek memulainya dengan membuat sketsa atau visualisasi dari apa yang diketahui di soal. Bangun yang diambil subjek sebagai contoh adalah persegi panjang, meskipun dalam soal ini bangun yang dimaksud adalah segi empat sembarang. Langkah-langkah yang dilakukan subjek dalam menyelesaikan soal adalah valid berdasarkan asumsi yang subjek bangun. Langkah dengan mengambil salah satu contoh adalah termasuk ke dalam strategi pembuktian induktif.

d. Pembuktian pada soal nomor 4

⑤ **Diketahui** : Setengah lingkaran berhimpit dengan alas (sisi) \overline{AB} dari segi $\triangle ABC$
titik sudut C bergerak sedemikian sehingga titik tengah sisi AC selalu terletak pada tengah lingkaran yg diketahui
Prove : himpunan tempat kedudukan titik C adalah setengah lingkaran



Pembuktian

<p>① Titik D adalah titik tengah dari AC</p> <p>② \overline{BD} garis bagi sudut $\angle ABC$ sehingga $\angle ABD \cong \angle DBC$</p> <p>③ $\overline{AB} \cong \overline{AB}$ $\overline{BD} \cong \overline{BD}$</p> <p>④ $\triangle ABD \cong \triangle DBC$</p> <p>⑤ karena umun $\triangle ABD \cong \triangle DBC$ maka jika kedua segitiga tersebut diperbangsa maka himpunan tempat kedudukan titik C selalu sama yaitu selalu berada pa pada setengah lingkaran</p>	<p>① Permisalan</p> <p>② angle angle bisector</p> <p>③ Refleksi property</p> <p>④ sisi sudut sisi' (SAS)</p>
--	---

Gambar 4. Hasil Pembuktian Subjek pada Soal No. 4

Dari hasil penyelesaian subjek nampak bahwa subjek dapat mengidentifikasi apa yang diketahui dalam soal nomor 4. Subjek menetapkan pembuktian yang digunakan untuk menyelesaikan soal tersebut adalah pembuktian tidak langsung yaitu dengan kontradiksi. Akan tetapi pada langkah penyelesaiannya subjek tidak menggunakan pengandaian/permisalan. Jadi subjek merencanakan penyelesaian soal ini dengan kontradiksi, tetapi penyelesaiannya tidak menggunakan prosedur yang benar. Subjek juga menunjukkan ketidaktepatan dalam penggunaan sifat transitif. Sifat transitif tidak dapat diterapkan dalam hubungan yang menggunakan tanda tidak sama dengan (\neq).

2. Hasil Wawancara

Tujuan diadakannya wawancara adalah untuk mengidentifikasi strategi pembuktian yang dilakukan mahasiswa. Berikut adalah hasil wawancara dengan ketiga subjek tersebut.

a. Hasil Wawancara subjek pada soal No. 1

Hasil wawancara menunjukkan bahwa subjek melakukan pembuktian dengan memahami soal, mencari informasi penting dalam soal, mencari apa yang ditanyakan soal, dan menyusun prosedur pembuktian dengan mengaitkan apa yang diketahui. Prosedur tersebut diyakini benar oleh subjek. Subjek juga dapat memilih dali/teorema atau fakta tentang konsep yang relevan. Petikan wawancara yang menunjukkan hal tersebut adalah sebagai berikut:

P : Untuk soal nomor 1, dapatkah Anda jelaskan langkah atau prosedur untuk menyelesaikannya?

S : Saya berusaha memahami soal itu dulu, dengan memahami soal, maka saya akan tahu apa yang diketahui dari soal itu dan apa yang harus kita buktikan. Dari informasi yang ada tersebut, maka kita akan mendapatkan jalan apa yang akan kita buktikan. Misalnya yang saya ingat itu, dari soal nomor 1 itu, C adalah titik tengah garis BE dan AD kan. Berarti C ini memotong garis BE dan AD menjadi dua bagian yang sama besar. Jadi kita akan tahu dua bagian dari segitiga ini yang kongruen. Selanjutnya dari gambar ini kita ketahui ada dua sudut yang bertolak belakang, dimana dua sudut yang bertolak belakang itu merupakan dua sudut yang kongruen. Sehingga kita peroleh dua bagian dari soal ini Pak, dua bagian dari segitiga yang kongruen. Nah, kemudian, eee...ntar dulu. Dan di sini Pak, ini

saya salah tulis Pak. Yang nomor 5 mestinya saya tulis di nomor 4. Baru dua bagian kan. Sedangkan untuk membuktikan dua segitiga kongruen itu kan da Sisi, Sisi, Sisi, pokoknya ada tiga bagian yang harus kita cari, dia kongruen atau ndak. Sudut BCA kan kongruen dengan DCE, nah sedangkan sudut BCA ini menghadap ke yang ini, garis BA sama yang sudut DCE menghadap garis DE sehingga seperti yang pernah saya baca, jika sisi suatu segitiga kongruen maka sudut di hadapan kedua sisi itu adalah kongruen. Makanya di sini alasannya kongruen kan Pak, jadinya kedua segitiga ini kongruen. Karena dia kongruen, dan ini dia sama, maka dapat kita sebut ini garis BA dan DE ini sejajar. Soalnya alasannya itu jika dua garis dipotong oleh suatu transversal, sedemikian hingga sehingga kedua sudut dalam berseberangannya kongruen, maka kedua garis itu sejajar.

P : Lalu mengapa mengapa Anda menggunakan dalil ini? Mengapa bukan dalil yang lain?

S : Soalnya sudah ketemu bagian-bagiannya yang kongruen, nah karena dua segitiga ini dia kongruen, dari informasi itu bisa kita buktikan bahwa dia sejajar

b. Hasil Wawancara subjek pada soal No. 2

Dari hasil wawancara menunjukkan bahwa subjek mengidentifikasi unsur-unsur, definisi, dan istilah yang diketahui dalam soal dan menterjemahkan pengertian dalam informasi tersebut untuk membantu menyusun bukti. Petikan wawancara yang menunjukkan hal tersebut adalah sebagai berikut:

P : Untuk nomor 2, bagaimana Anda memulai pembuktian?

S : Di sini kan ada segitiga, nah di segitiga itu ada garis yang membagi sudut BAC itu, dibagi oleh garis AD. Nah disini permintaan soal itu, disini garis AD itu kita harus buktikan bahwa AD itu adalah garis berat dan garis tinggi dari segitiga ABC. Nah disini kita sudah ketemu informasi bahwa garis AB kongruen dengan AC. Berarti dia sama kan. Nah terus kan sudah diketahui. Nah berarti kan disini ada sudut BAC, dipotong oleh garis AD, sudutnya kan yang dipotong kan. Sudut yang dipotong ini menjadi sudut yang ukurannya itu sama kan Pak.

c. Hasil Wawancara subjek pada soal No. 3

Hasil wawancara menunjukkan bahwa subjek memilih segi empat berupa persegi panjang sebagai sketsa bangun yang mewakili soal karena menganggap mudah ketika proses pembuktian. Tentunya alasan ini adalah alasan yang tidak logis. Petikan wawancara yang menunjukkan hal tersebut adalah sebagai berikut:

P : Mengapa yang Anda pilih persegi panjang?

S : Karena lebih mudah sih Pak, bisa sih sebenarnya segi empat sembarang, kan nanti akan membentuk 4 persegi. Baru nanti di dalamnya jajar genjangnya. Sama sih Pak, cuman lebih mudah dengan persegi panjang.

d. Hasil Wawancara subjek pada soal No. 4

Hasil wawancara menunjukkan bahwa subjek membuktikan dengan membuat asumsi-asumsi, dugaan, atau perkiraan berdasar informasi dalam soal. Asumsi tersebut dianggap benar oleh subjek. Petikan wawancara yang menunjukkan hal tersebut adalah sebagai berikut:

P : Apa yang Anda ketahui dari soal ini?

S : Yang saya ketahui itu, segitiganya itu menempel pada diameter setengah lingkaran. Nah disini ada garis AC itu, apa namanya itu titik tengahnya, sehingga memotong garis AC menjadi dua sama besar kan. Saya permissalkan titik potongan itu di D. berarti nanti membentuk dua segitiga, itu menurut saya Pah,, he.. (tertawa). Lalu saya akan buktikan dua segitiga ini kongruen, kalo sudah kongruen maka berapapun banyaknya, hee...ini menurut saya Pak (tertawa), berapapun banyaknya kita bikin asalkan kongruen, misalnya ini dua segitiga yang kongruen, nanti kita bikin lagi, seperti ini bentuknya, di sini, di sini, di sini.

P : Apa alasannya Anda menyebut BD garis bagi?

S : Kan... saya permissalkan Pak.. menurut saya maksud saya, ee...(berhenti menjawab)

P : Apakah hanya perkiraan saja?

S : Iya Pak, perkiraan. Soalnya kan bisa kita bentuk permissalan di sini, sehingga nanti sudutnya itu bisa dia pecah kan, nah nanti di sini karena dia diketahui ini sudah kongruen, kan ini titik tengah dia bilang kan Pak, berarti ini dia kongruen, nah karena di sini dia berimpit, berarti dia kongruen, trus di sini sudutnya. Nah jadinya Sisi, Sisi, Sudut jadinya.

3. Hasil Analisis

Berdasarkan hasil pembuktian soal tes dan hasil wawancara, maka dapat dikategorikan tipe pembuktian pada masing-masing soal. Pengkategorian ini mengacu pada kriteria atau deskripsi tipe penyusunan yang pada artikel ini dipaparkan pada Tabel 1 di atas. Tabel 3 berikut ini menyatakan kategori pembuktian yang dilakukan oleh subjek.

TABEL 3

TIPE PEMBUKTIAN OLEH SUBJEK PADA MASING-MASING SOAL

Nomor Soal	Tipe Proses Pembuktian yang digunakan
Soal 1	Pembuktian secara sintaksis (<i>syntactic proof production</i>)
Soal 2	Pembuktian secara sintaksis (<i>syntactic proof production</i>)
Soal 3	Pembuktian secara sintaksis (<i>syntactic proof production</i>)
Soal 4	Pembuktian secara semantic (<i>semantic proof production</i>)

Dengan membandingkan data hasil analisis pada soal tes dan wawancara subjek, maka diperoleh strategi pembuktian pada jenis pembuktian secara sintaksis (*syntactic proof production*) dan pembuktian secara semantik (*semantic proof production*) sebagaimana dalam tabel 4 berikut ini.

TABEL 4

STRATEGI PEMBUKTIAN YANG DILAKUKAN SUBJEK

Tipe Proses Pembuktian	Strategi Pembuktian
Sintaksis	<ul style="list-style-type: none"> - Mengidentifikasi dan memanipulasi pernyataan atau informasi dalam soal - Menterjemahkan informasi dalam soal - Memilih dalil dan fakta-fakta yang terkait atau relevan - Menggunakan simbol dan notasi matematika yang formal dalam melakukan tahapan pembuktian - Menggunakan bantuan sketsa dalam penyelesaian - Menarik kesimpulan dari setiap pernyataan yang telah didapatkan
Semantic	<ul style="list-style-type: none"> - Menggunakan intuisinya (berupa dugaan/ perkiraan/perasaan atau <i>feeling</i>) bahwa langkah yang digunakan benar dan melakukan penalaran. Dalam hal ini menunjukkan titik C selalu berada dalam setengah lingkaran. - Membuat sketsa untuk memudahkan analisis.

Dari hasil paparan dan analisis dapat diperoleh informasi bahwa tipe prosedur pembuktian yang dilakukan mahasiswa pada materi Geometri pokok bahasan kesebangunan, kekongruenan, dan

kesejajaran adalah dengan prosedur pembuktian sintaksis (*syntactic proof production*) dan prosedur pembuktian semantik (*semantic proof production*). Sementara prosedur pembuktian secara prosedural (*procedural proof production*) tidak digunakan dalam pembuktian.

Jika mengacu pada pendapat Weber (2004), pembuktian secara prosedural memiliki karakteristik subjek mencoba untuk mengkonstruksi bukti dengan menerapkan suatu prosedur atau menetapkan beberapa langkah-langkah tertentu yang dia yakini akan dapat menghasilkan bukti yang valid (benar), tetapi tidak memahami arti dari pembuktian tersebut. Kecenderungannya adalah meniru apa yang dicontohkan oleh dosen atau dalam buku. Contoh pembuktian prosedural adalah ketika mahasiswa menggunakan induksi matematika untuk membuktikan. Dimulai dengan mengambil nilai $n = 1$, mengasumsikan benar untuk $n = k$, dan benar untuk $n = k + 1$. Tetapi kebanyakan mahasiswa tidak memaknai pembuktian induksi tersebut (Weber, 2004). Oleh karenanya pada soal-soal Geometri kurang memungkinkan mahasiswa menggunakan pembuktian prosedural karena soal pembuktian dalam Geometri tidak memiliki langkah pembuktian yang tetap, yang ajeg, atau jelas prosedurnya. Melainkan bisa dibuktikan dengan banyak pendekatan.

Berikut adalah pembahasan strategi pembuktian pada masing-masing prosedur pembuktian berdasarkan data dan analisis yang diperoleh dalam penelitian ini:

a. Strategi Pembuktian pada Prosedur Pembuktian Sintaksis (*syntactic proof production*)

Prosedur pembuktian sintaksis merupakan prosedur pembuktian dimana seseorang menuliskan bukti dengan hanya memanipulasi pernyataan dari definisi yang benar (*valid*) dan juga fakta-fakta lain yang relevan dengan cara yang diperbolehkan atau dibenarkan oleh logika (Weber & Alcock, 2004). Di dalam literatur pendidikan matematika, pembuktian secara sintaksis lebih dikenal sebagai dengan pembuktian deduktif formal murni (Weber, 2004). Selain berangkat dari definisi, pembuktian sintaksis juga menggunakan simbol-simbol matematika yang formal.

Dalam Geometri sendiri setiap objek geometri memiliki definisi yang jelas, kecuali unsur-unsur pangkal seperti titik, garis, dan ruang yang memang

tidak didefinisikan. Oleh karenanya pembuktian secara sintaksis merupakan prosedur pembuktian yang banyak digunakan oleh mahasiswa. Meskipun dalam pembuktian ini mengharuskan mahasiswa untuk memahami sebuah definisi dengan baik, sehingga mampu menggunakan dengan baik definisi tersebut pada berbagai masalah/soal.

Dalam penelitian ini diperoleh informasi bahwa ada beberapa strategi mahasiswa dalam melakukan pembuktian secara sintaksis. Strategi tersebut antara lain adalah: a) mengidentifikasi dan memanipulasi pernyataan atau informasi dalam soal, b) menterjemahkan bagian informasi dalam soal, c) memilih teorema atau dalil yang terkait atau relevan, d) menggunakan simbol dan notasi matematika yang formal dalam melakukan tahapan pembuktian, e) menggunakan bantuan sketsa dalam penyelesaian, dan f) menarik kesimpulan dari setiap pernyataan yang telah didapatkan.

Strategi mengidentifikasi dan memanipulasi pernyataan atau informasi dalam soal merupakan strategi dimana mahasiswa melakukan analisis terhadap pernyataan atau informasi yang diberikan. Mengidentifikasi dan memanipulasi berkaitan dengan kemampuan memahami pernyataan atau informasi tersebut kemudian menjabarkannya sebagai tahapan untuk membuktikan. Mengidentifikasi dan memanipulasi informasi akan berkaitan dengan langkah apa yang diambil selanjutnya dalam tahapan pembuktian. Jika strategi ini tidak dimiliki mahasiswa, maka tentunya akan menghambat proses pembuktian.

Strategi menterjemahkan bagian informasi dalam soal merupakan strategi dimana mahasiswa mendiskripsikan dan menjabarkan informasi dalam bentuk lain yang mudah dipahami. Jika informasi dalam bentuk notasi atau simbol formal matematika, maka mahasiswa menjabarkannya dalam bentuk lain sehingga memperjelas maksud dari informasi tersebut. Sebagai contoh dalam penelitian ini adalah hasil wawancara yaitu: "*...Nah berarti kan disini ada sudut BAC, dipotong oleh garis \overline{AD} , sudutnya kan yang dipotong kan. Sudut yang dipotong ini menjadi sudut yang ukurannya itu sama kan Pak...*". Subjek menterjemahkan bahwa \overline{AD} sebagai garis bagi sehingga menghasilkan dua sudut yang kongruen atau sama. hanya saja mengatakan "sudutnya dipotong oleh \overline{AD} ".

Strategi memilih teorema atau dalil yang terkait atau relevan merupakan strategi dimana mahasiswa

memilih secara tepat teorema, dalil, lemma atau yang lainnya yang relevan dengan apa yang akan dibuktikan. Memilih dan menggunakan dalil atau teorema yang tepat berkaitan erat dengan sejauh mana mahasiswa memahami dalil atau teorema tertentu. Pemahaman yang baik terhadap sebuah dalil atau teorema akan memudahkan mahasiswa dalam memilih dan mengaplikasikannya dalam tahapan pembuktian. Dalil atau teorema dalam Geometri sangat banyak, sehingga mahasiswa harus memahaminya, tidak dengan cara menghafalkannya.

Strategi menggunakan simbol dan notasi matematika yang formal dalam melakukan tahapan pembuktian. Strategi ini berkaitan dengan penggunaan simbol-simbol dan notasi-notasi yang formal dan resmi. Yaitu notasi matematika yang dikenal secara luas dan menjadi kesepakatan di kalangan matematikawan dan pendidikan matematika. Dengan menggunakan simbol dan notasi yang formal, maka akan memudahkan mahasiswa dalam menyusun bukti. Ini dikarenakan simbol dan notasi formal sudah dikenal dengan baik oleh mahasiswa dan penggunaannya merupakan ciri utama dari prosedur pembuktian sintaktis.

Strategi menggunakan bantuan sketsa dalam penyelesaian merupakan strategi dimana mahasiswa membuat sketsa atau model dari sebuah pernyataan, informasi, fakta yang diberikan dalam soal pembuktian. Kemampuan ini menjadi penting bagi mahasiswa yang melakukan proses pembuktian, sebab dengan bantuan sketsa dan model tersebut maka akan memudahkan dalam menyusun langkah berikutnya. Dengan sketsa dan model, mahasiswa lebih mudah dalam menemukan kaitan-kaitan antar bagian dalam soal dan lebih memudahkan dalam analisis karena bentuk yang lebih konkrit dari pernyataan atau informasi tersebut.

Strategi menarik kesimpulan dari setiap pernyataan yang telah didapatkan merupakan suatu tahapan dimana mahasiswa menemukan pernyataan baru sebagai akibat dari konsekuensi logis dari kebenaran pernyataan sebelumnya. Kesimpulan yang diperoleh tentu saja merupakan pernyataan baru yang akan mempermudah upaya pembuktian selanjutnya.

b. Strategi Pembuktian pada Prosedur Pembuktian Semantik (*semantic proof production*)

Prosedur pembuktian semantik merupakan prosedur pembuktian ketika seseorang menggunakan langkah yang menghasilkan contoh dari objek matematika dimana pernyataan yang diterapkan bertujuan untuk menerka dan mengarahkan kepada kesimpulan formal (Weber & Alcock, 2004). Seseorang melakukan pembuktian semantic jika seseorang menguji kebenaran pernyataan dengan menggunakan representasi tertentu, misalnya: diagram, grafik, atau objek matematika lain yang menurut subjek relevan dengan pernyataan tersebut. Dalam literatur pendidikan matematika, pembuktian semantic mengacu kepada pembuktian yang mengikuti alur berpikir intuitif.

Dalam penelitian ini diperoleh informasi bahwa ada beberapa strategi mahasiswa dalam melakukan pembuktian secara semantic. Strategi tersebut antara lain adalah: a) menggunakan intuisinya dalam membuat asumsi atau dugaan yang mengarah kepada penyimpulan dan b) membuat sketsa untuk memudahkan analisis.

Strategi menggunakan intuisinya dalam membuat asumsi atau dugaan yang mengarah kepada penyimpulan seperti yang diminta buktikan soal merupakan strategi dimana mahasiswa melakukan dugaan-dugaan atau perkiraan berdasar intuisi mereka. Mahasiswa menduga dan memperkirakan akibat dari sebuah pernyataan berdasarkan pemahaman mereka terhadap pernyataan atau informasi yang diberikan tanpa menggunakan konsep atau pendekatan teori yang formal. Setelah itu mahasiswa melakukan penalaran untuk menentukan akibat logis dari asumsi atau dugaan yang dibuat berdasarkan intuisinya dan kemudian menghasilkan kesimpulan. Kesimpulan ini tentunya tidak didasarkan pada dalil atau teorema yang kuat. Hal ini mendukung pendapat Abdusaakir (2014) yang menyatakan pada strategi semantik proses membuat kesimpulan dilakukan secara spontan (hanya menebak) yang tidak didasarkan pada koordinasi secara formal antara komponen struktur kognitif yang dimiliki.

Strategi membuat sketsa untuk memudahkan analisis merupakan strategi dimana mahasiswa membuat model dari informasi dan pernyataan dalam soal sehingga dapat memudahkan melakukan analisis untuk menentukan tahapan pembuktian berikutnya. Dengan mensketsa objek yang merupakan representasi soal, mahasiswa akan lebih

mudah untuk membuktikan soal. Strategi ini juga dilakukan mahasiswa ketika melakukan pembuktian secara sintaksis.

D. SIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Strategi pembuktian pada soal Geometri dengan tipe pembuktian sintaksis (*syntactic proof production*) antara lain adalah dengan mengidentifikasi dan memanipulasi pernyataan atau informasi dalam soal, menterjemahkan informasi dalam soal, memilih teorema atau dalil yang terkait atau relevan, menggunakan simbol atau notasi matematika yang formal dalam melakukan tahapan pembuktian, menggunakan bantuan sketsa, dan menarik kesimpulan dari setiap pernyataan yang telah didapatkan.
2. Strategi pembuktian pada soal Geometri dengan tipe pembuktian semantik (*semantic proof production*) antara lain adalah dengan menggunakan intuisinya untuk membuat asumsi, dugaan atau perkiraan yang dianggap benar dan melakukan penalaran atas asumsi yang dibuat dan menggunakan sketsa untuk membantu memudahkan pembuktian.

Saran dari penelitian ini adalah perlu adanya penelitian lanjutan yang mengidentifikasi kesulitan mahasiswa dalam melakukan pembuktian pada soal Geometri berdasar tipe pembuktian menurut kerangka kerja pembuktian menurut Weber. Perlu adanya penelitian yang mengembangkan perangkat pembelajaran yang dapat meningkatkan pemahaman mahasiswa terhadap konstruksi suatu pembuktian pada soal atau masalah Geometri.

UCAPAN TERIMA KASIH

Ucapan terimakasih kepada Pusat Penelitian dan Penerbitan (PPP) Lembaga Penelitian dan Pengabdian kepada Masyarakat (LP2M) Universitas Islam Negeri (UIN) Mataram yang memberikan kesempatan untuk mengakses dana hibah penelitian tahun 2017; Kepala Program Studi Tadris Matematika Fakultas Tarbiyah dan Keguruan (FTK) UIN Mataram yang memberikan izin penelitian; dan para mahasiswa program studi Tadris Matematika FTK UIN Mataram yang mendukung penelitian ini.

REFERENSI

- [1] Abdussakir. (2014). Proses Berpikir Mahasiswa dalam Menyusun Bukti Matematis dengan Strategi Semantik. *Jurnal Pendidikan Sains*, 2(3), 132-140
- [2] Alexander, D.C, Koeberlein, G.M. (2015). *Elementary Geometry for College Students Sixth Edition*. USA: Cengage Learning.
- [3] Azwar, S. (2007). *Metode Penelitian*. Yogyakarta: Pustaka Pelajar.
- [4] Balacheff, N. (2010). Bridging Knowing and Proving in Mathematics: A Didactical Perspective. Dalam Hanna,G. (eds). *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives*. New York: Springer
- [5] Blanton, M., Stylianou, D. dan David, M. (2010). The Nature of scaffolding in Undergraduate Transition to Formal Proof. Dalam Pateman, N. (eds). *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 113-120, Honolulu, HI
- [6] Cheng, Ying-Hao & Lin, Fou-Lai. (2009). Developing Learning Strategies for Enhancing Below Average Students' Ability in Constructing Multi-Step Geometry Proof. Dalam Lin, Fou-Lai (eds). *Proceeding of The ICMI Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education*, Vol. 1. Taipei: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University
- [7] Epp, S.S. (2003). The Role of Logic in Teaching Proof. *The American Mathematical Monthly*, 110(10):886-899. Pernyataan yang sama juga disampaikan oleh Weber, K. 2001. Student Difficulty in Constructing Proof: The Need for Strategic Knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 48(1), 101-109
- [8] Kogce, D., Aydin, M. & Yildiz. (2010). C. The Views of High School Student about Proof and Their Levels of Proof (The Case of Trabzon). *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 2, 2544-2549,
- [9] Moleong, L. J. (2012). *Metodologi penelitian kualitatif*. Bandung: Remaja Rosdakaya.
- [10] Pfeiffer, K. (2011). Features and Purposes of Mathematical Proofs in the View of Novice Student: Observation from Proof Validation and Evaluation Performances. *PhD Dissertation (unpublished) of School of Mathematic, Statistics and Applied Mathematics*. Galway: National University of Ireland.
- [11] Stylianides, A. (2007). The Notion of Proof in The Context of Elementary School Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 65(1), 1-20
- [12] Weber, K. (2003). *Students' difficulties with proof*. MAA Online: Research Sampler, diakses di <https://www.maa.org/programs/faculty-and-departments/curriculum-department-guidelines-recommendations/teaching-and-learning/research-sampler-8-students-difficulties-with-proof>
- [13] Weber, K. (2004). A Framework for Describing the Processes that Undergraduates Use to Construct Proofs. *Proceeding of The 28th Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 425-432
- [14] Weber, K. & Alcock, L. (2004). Semantic and Syntactic Proof Productions. *Educational Studies in Mathematics*, 56, 209-234.